CHAPITRE IV
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Objectifs

Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction f.
De plus, cette équation fait intervenir la fonction f ainsi que ses dérivées, d'où le terme différentiel.
Les équations différentielles apparaissent naturellement dans de nombreux domaines : physique, électricité, biologie, évolution des populations, modélisation informatique….

En électricité par exemple, l'équilibre stationnaire d'un circuit électrique (Résistance-Bobine) est traduit par l'équation : $E = Ri + L\dot{i}$ où i est une fonction du temps et $\dot{i}$ désigne la dérivée de la fonction *i*.
En physique encore, si N(t) désigne le nombre de noyaux désintégrés à l'instant t, l'expérience montre que $N'(t) = -\lambda N(t)$ où λ est une constante.

La résolution de ces équations est donc fondamentale dans de nombreux domaines : déjà rencontrées lors de la construction de la fonction exponentielle, nous étudierons en priorité les équations différentielles du type y' = ay + b, où la fonction y est l'inconnue, et a et b sont deux réels.

Animations liées sur le site :

- Equation différentielle : cette applet java permet de déterminer la courbe représentant la solution d'une équation différentielle que vous choisissez.
  Vous pouvez aussi tracer une fonction de votre choix, pour comparer votre solution à l'équation avec la vraie solution.
  http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/euler/index.php

- Méthode d'Euler : notre première équation différentielle pour construire la fonction exponentielle. Cette animation met en place le principe de la méthode d'Euler.
  http://mathemitec.free.fr/animations/comprendre/euler-geop/index.php

I - Vocabulaire. Généralités.

> **Note**
> *Tous les exercices ou démonstrations des propriétés de ce chapitre se trouvent à la fin de ce document.*

→ Dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction, notée y en général.

→ L'équation est dite différentielle car elle fait intervenir les dérivées successives de la fonction y.
Rappelons en effet que la dérivée est associé à un taux, qui est lui-même une différence (quotient des variations de y sur variation de x) : d'où le terme différentiel.

→ Résoudre l'équation différentielle y' = ay + b c'est trouver **toutes les fonctions f** dérivables sur IR telles que pour tout x, f '(x) = af(x) + b où a et b sont deux constantes (indépendant de x).

→ Précisons aussi que l'équation y' = ay + b est dite du premier ordre car elle fait intervenir seulement la dérivée première.
Evidemment, il y des équations différentielles du $2^{ème}$ ordre, du $3^{ème}$ …

II – Résolution de y' = ay, a constante réelle

Théorème II-1.
(1) Les fonctions solutions de l'équation y' = ay sont les fonctions définies sur IR par $f(x) = ke^{ax}$, $k \in$ IR .
(2) Il existe une unique fonction dérivable f telle que y' = ay et $y(x_0) = y_0$: k est alors fixé par cette condition initiale.

Indication pour le (1) :
Dériver la fonction $\frac{f(x)}{e^{ax}}$ où f et une solution de (E) et conclure.

Exercice II-2
(1) Résoudre l'équation différentielle (E) : y' = 3y.
(2) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (2,3).

Exercice II-3
(1) Résoudre l'équation différentielle (E) y' = −2y.
(2) En déduire la solution de (E) dont la courbe représentative admet, au point d'abscisse 0, une tangente parallèle à la droite d'équation y = -4x+1.

III – Résolution de y' = ay + b, a (non nul) et b constantes réelles

Théorème III-1. *Soit a un réel non nul.*
(1) Les fonctions solutions de l'équation y' = ay + b sont les fonctions définies sur IR par $f(x) = ke^{ax} - b/a$ $k \in$ IR .
(2) Il existe une unique fonction dérivable f telle que y' = ay + b et $y(x_0) = y_0$: k est alors fixé par cette condition initiale.

Indication pour le (1) :
Chercher une solution particulière de € qui soit une fonction constante.
A l'aide de cette fonction, se ramener au théorème II-1.

Exercice III-2
Résoudre l'équation 2y' + y = 1.

Exercice III-2
Déterminer la solution de $2y' + y = 1$ telle que $y(-1) = 2$.

IV – Exercices Classiques

Exercice IV-1
Soit (E) l'équation différentielle $y'-2y=e^x$ et (Eo) : $y'-2y=0$.

1. Vérifier que la fonction définie par $u_0(x)=-e^x$ est solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (Eo).
3. Montrer que u est solution de (E) $\Leftrightarrow u-u_0$ est solution de (Eo).
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en 1.

Exercice IV-2 (Bac Blanc 2005)

On désigne par $\theta(t)$ la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'instant t (exprimé en heure).
A l'instant t = 0, ce corps dont la température est de 100°C est placé dans une salle à 20°C.

D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle. On suppose que le coefficient de refroidissement est -2,08.
1. Justifier que $\theta'(t) = -2{,}08\ \theta(t) + 41{,}6$.
2. En déduire l'expression de $\theta(t)$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction θ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer la limite de θ en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
5. Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes puis au bout de 30 minutes.
6. Déterminer la valeur exacte du temps au bout duquel le corps tombera à 30°C. En donner une valeur approchée.

Corrigé des démonstrations ou exercices.

Démonstration II-1.

(1) Supposons que f soit solution de l'équation différentielle f ' = af.

Nous voulons prouver que $f(x) = ke^{ax}$ cad que $\frac{f(x)}{e^{ax}} = k$ (une exponentielle ne s'annule pas).

Considérons alors la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}} = e^{-ax} f(x)$.

Nous allons montrer que g est constante sur IR, égale à 1.

- g est dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a, pour tout réel x, $g'(x) = \left(e^{-ax}\right)' f(x) + e^{-ax} f'(x)$ cad $g'(x) = -ae^{-ax} f(x) + ae^{-ax} f(x)$ puisque f ' = a f.
  Ainsi $g'(x) = 0,\ \forall x \in IR$.
- g est donc constante sur IR, donc il existe un réel k tel que $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}} = k \Leftrightarrow f(x) = ke^{ax}$, pour tout x.

(2) Nous savons donc que f(x) = ke^{ax} où C est un réel : comme $y(x_0) = y_0$ on a $y_0 = Ce^{ax_0}$ et comme une exponentielle ne s' annule pas, C est défini de manière unique.

Corrigé Exercice II-2.

(1) L'équation y' = 3y a une infinité de solutions, les fonctions f(x) = k e^{3x} où k est réel.
(2) On impose donc la condition y(2) = 3 : l'unique solution de (E) est alors f(x) = 3 e^{3x-6}.

Corrigé Exercice II-3.

(1) Les solutions de (E) sont les fonctions définies sue IR par f(x) = k e^{-2x}, où k est un réel.
(2) f est de la forme : f(x) = k e^{-2x}.
Comme la tangente au point au point d'abscisse 0 à C est parallèle à D : y = -4x+1, ces deux droites ont le même coefficient directeur, -4.
Mais le coefficient directeur de cette tangente est f'(0) : donc −2k = -4 et k = 2.
La seule solution est donc: f(x) = $2e^{-2x}$

Démonstration III-1.

(2) La démonstration du second point est identique à celle de II-1.

(1) Démontrons la propriété voulue :

<u>Méthode 1 :</u>

→ On remarque tout d'abord que la fonction constante y0 = – b/a est solution particulière de (E).

→ Ainsi y' = ay + b ⇔ $\begin{cases} y' = ay + b \\ y_0' = ay_0 + b \end{cases}$ ⇔ $y' - y_0' = ay + b - (ay_0 + b)$ ⇔ $(y - y_0)'$ =a$(y - y_0)$ ce qui équivaut à dire que la fonction $y - y_0$ est solution de l'équation vu en II-1.

On sait alors qu'il existe un réel k tel que $y - y_0 = ke^{ax} \Leftrightarrow y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

<u>Méthode 2 :</u>

Posons u = ay + b de sorte que u' = ay'.
Ainsi y solution de (E) ⇔ y' = ay + b ⇔ u' = au ⇔ il existe k telle que u(x) = k e^{ax} d'après le théorème II-1.
Par conséquent, y solution de (E) ⇔ ay = k e^{ax} – b ⇔ y = k/a e^{ax} – b/a ⇔ y = K e^{ax} – b/a où K est un réel.

Corrigé Exercice III-2.

D'après le théorème III-1, les solutions de y' = – ½y + ½ sont les fonctions du type
f(x) = k $e^{-x/2}$ + 1 où k est un réel quelconque.

Corrigé Exercice III-2.

- D'après l'exercice précédent, les solutions de y' = – ½y + ½ sont les fonctions du type f(x) = k $e^{-x/2}$ + 1 où k est un réel quelconque.
- Comme f(-1) = 2, k $e^{1/2}$ + 1 = 2 ⇔ k = $1/\sqrt{e}$ = $e^{-1/2}$

L'unique solution est donc la fonction f définie par f(x) = $e^{-1/2}$ $e^{-x/2}$ + 1.

Corrigé Exercice IV-1.

Remarquons déjà que le théorème III-1 ne s'applique pas **puisque** $b = e^x$ **n'est pas une constante** (b dépend de x).
Suivons donc l'agencement des questions…

1. On a $u_0' - 2u_0 = -e^x - 2\left(-e^x\right) = e^x$ donc u_0 est solution de (E).

2. Les solutions de l'équation (Eo) sont les fonctions du type $y(x) = ke^{2x}$ où k est un réel.

3. $u - u_0$ est solution de (Eo) signifie par définition que $(u-u_0)' - 2(u-u_0) = 0 \Leftrightarrow u' - 2u = u_0' - 2u_0$.
Mais comme u_0 est solution de (E) (Q1), on a : $u - u_0$ est solution de (Eo) $u' - 2u = e^x$ ce qui signifie par définition de (E), que $u - u_0$ est solution de (Eo) ⇔ u est solution de (E).

4. D'après la question 3, u est solution de (E) $\Leftrightarrow u - u_0$ est solution de (Eo).
Or les solutions de (Eo) sont les fonctions du type $y(x) = ke^{2x}$ où k est un réel (Q2).
Ainsi, u est solution de (E) $\Leftrightarrow u - u_0 = ke^{2x} \Leftrightarrow u = ke^{2x} + u_0 \Leftrightarrow u(x) = ke^{2x} - e^x$ où k est une constante réelle.

5. f est de la forme $f(x) = ke^{2x} - e^x$ puisque solution de (E).
Comme f(1) = 0, on a 0 = ke²-e cad $k = e^{-1}$.
Ainsi, $f(x) = e^{2x-1} - e^x$ est la solution cherché

Corrigé Exercice IV-2.

On désigne par θ(t) la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'**instant t (exprimé en heure)**.
A l'instant **t = 0, ce corps dont la température est de 100°C** est placé dans une salle à 20°C.

D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement **θ'(t) est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle**.

On suppose que le coefficient de refroidissement est -2,08.

REM : avant tout calcul, il est clair que la température du corps va décroître (cad θ décroissante) et que la température du corps va tendre vers celle de la salle (cad $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = 20$).
Ce genre de réflexion avant calcul nous permettra d'éviter d'éventuelles erreurs…

1. Justifier que θ'(t) = –2,08 θ(t) + 41,6.

D'après l'énoncé, $\theta'(t)$ est proportionnel à $\theta(t) - 20$. On dit que le coefficient de proportionnalité est -2,08 donc $\theta'(t) = -2{,}08\left(\theta(t) - 20\right) = -2{,}08\theta(t) + 41{,}6$.

2. En déduire l'expression de θ(t).

D'après le cours, on en déduit que $\theta(t) = Ke^{-2{,}08t} + \dfrac{41{,}6}{2{,}08} = Ke^{-2{,}08t} + 20$.

Mais nous avons la condition initiale $\theta(0) = 100 \Leftrightarrow K + 20 = 100 \Leftrightarrow K = 80$ et on a donc $\theta(t) = 80e^{-2{,}08t} + 20$.

3. Déterminer le sens de variation de la fonction θ sur [0 ; +∞[.

Cette fonction est dérivable sur IR+ et nous avons $\theta'(t) = \underbrace{80\times(-2,08)}_{<0}\underbrace{e^{-2,08t}}_{>0} < 0$ car une exponentielle est toujours positive. Donc θ est décroissante sur IR+.

4. Calculer la limite de θ en +∞. Interpréter ce résultat.

Vu que $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, on a par composition $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(80e^{-2,08t}+20\right) = 20$: la température du corps tend donc vers celle de la salle.

5. Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes puis au bout de 30 minutes.

Attention, le temps est exprimé en heure !

- 20 min = 1/3 heure et $\theta(\frac{1}{3}) = 80e^{-\frac{2,08}{3}}+20 \approx 59,9$ soit 60°C arrondie au degré.

- 30 min = 1/2 heure et $\theta(\frac{1}{2}) = 80e^{-\frac{2,08}{2}}+20 \approx 48,3$ soit 48°C arrondie au degré.

6. Déterminer la valeur exacte du temps au bout duquel le corps tombera à 30°C. En donner une valeur approchée.

On résout $\theta(t) = 30 \Leftrightarrow 80e^{-2,08t}+20 = 30 \Leftrightarrow e^{-2,08t} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow -2,08t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{-2,08} \approx 0,99$ soit environ 1h.